УДК 511

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ОБУЧЕНИЮ МЕТОДАМ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

Ожегова А.В., кандидат физико-математических наук, доцент,
Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань
ozhegovaalla@gmail.com

Хайруллина Л.Э., кандидат физико-математических наук, доцент,
Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань
lxayrullina@yandex.ru

Аннотация. В работе излагается один из подходов к чтению дисциплины «Методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода» для студентов, обучающихся по направлениям «Математика» и «Математика и компьютерные науки». В основу данного специального курса положены результаты научных исследований Казанской школы математиков под руководством Габдулхаева Б.Г., в том числе и авторов.

Ключевые слова: сингулярное интегральное уравнение первого рода, корректность задачи, аппроксимативный метод.

ON ONE APPROACH TO TEACHING METHODS OF SOLVING SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND

A.V. Ozhegova, PhD, associate professor,
Kazan Federal University, Kazan
ozhegovaalla@gmail.com

L.E. Khairullina, PhD, associate professor,
Kazan Federal University, Kazan
lxayrullina@yandex.ru

Abstract. In this paper one of the approaches to reading the discipline "Methods for Solving Singular Integral Equations of the First Kind" is presented for students studying in the fields "Mathematics" and "Mathematics and Computer Science". This special course is based on the results of scientific research of the Kazan School of Mathematics headed by Gabdulkhayev B.G., including authors.

Keywords: singular integral equation of the first kind, correctness of the problem, approximate method.

Многочисленные задачи электродинамики, электростатики, теории упругости, аэрогидромеханики и других разделов физики, механики и математической физики приводят к различным классам сингулярных интегральных уравнений первого рода с интегралами, понимаемыми либо как несобственные, либо в смысле главного значения по Коши (см., напр., библ. в [1]). Точно они, как правило, решаются в редких случаях, поэтому их приходится решать приближенно.

В монографиях, посвященных методам решения некорректно поставленных задач (см., напр., [4]) одним из первых примеров таких задач рассматривается интегральное уравнение первого рода. Это связано с вполне непрерывностью интегрального оператора в известных функциональных пространствах, следовательно, неограниченностью обратного к нему, что ведет в свою очередь к нарушению устойчивости решения этого уравнения. В этом случае для решения указанных уравнений применяются методы решения некорректно поставленных задач, и чаще всего метод регуляризации.

Однако, когда ядра интегрального уравнения имеют слабую особенность или являются ядрами Коши или Гильберта, то, оказывается, удается отыскать корректную постановку задач решения таких уравнений путем специального выбора пространств искомых элементов и правых частей [1, 3, 5]. В этом случае к рассматриваемым уравнениям возможно применение аппроксимативных методов и последующее теоретическое обоснование с установлением эффективных оценок погрешностей. Именно на таком подходе к использованию аппроксимативных методов для решения слабосингулярных и сингулярных интегральных уравнений основан указанный выше спецкурс.

Сначала рассматриваются понятия несобственного интеграла и сингулярного интеграла, понимаемого в смысле главного значения по Коши и их свойства, а также свойства операторов, определяемых с их помощью в известных функциональных пространствах. На основании этих свойств показывается некорректность задачи решения уравнений вида

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{s-\sigma}{2}\right| x(\sigma)d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s,\sigma)x(\sigma)d\sigma = y(t), \qquad 1)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \ln\frac{1}{|t-\tau|}\frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}d\tau + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} g(t,\tau)\frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}d\tau = f(t),\ \ |t| \le 1, \qquad 2)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} g(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau = f(t),\ \ |t| < 1, \qquad 3)$$

где $h(s,\sigma), y(t), g(t,\tau), f(t)$ – известные функции в своих областях определения, $x(\sigma), \varphi(\tau)$ – искомые функции.

Далее для каждого из уравнений (1) – (3) вводятся соответственно пары пространств искомых элементов X и правых частей Y, в которых устанавливается корректность задачи.

Например, для уравнения (1) в качестве таких пар предлагаются следующие: $(L_2, W_1^2), (V, V^1)$, где $L_2 = L_2[0,2\pi]$ – пространство квадратично суммируемых 2π −периодических функций, $W_2^1 = \{x(s) \in L_2 : \exists\ \varphi'(s) \in L_2\}$ с нормами соответственно

$$\|x\|_{L_2} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(s)^2 ds\right)^{1/2},$$

$$\|x\|_{W_2^1} = \|x\|_{L_2} + \|x'\|_{L_2}.$$

Пространство $V = V[0,2\pi]$ – пространство непрерывных 2π −периодических функций, для которых сингулярный интеграл с ядром Гильберта

$$Jx \equiv J(x;s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma,$$

понимаемый в смысле главного значения по Коши, является непрерывной функцией. $V^1 = V^1[0,2\pi]$ – линейное пространство непрерывных 2π −периодических функций, имеющих первые производные из пространства $V[0,2\pi]$. Нормы в этих пространствах определяются следующим образом:

$$\|x\|_V = \|x\|_{\tilde C} + \|Jx\|_{\tilde C},$$
$$\|y\|_{V^1} = \|y\|_{\tilde C} + \|y'\|_V,$$

где $\tilde C$ − пространство непрерывных 2π −периодических функций с обычной нормой.

Далее, к интегральному уравнению с логарифмической особенностью (1) применяют известные численные методы: коллокации, Галеркина, метод механических квадратур, наименьших квадратов, строятся вычислительные схемы, проводится их теоретическое обоснование на основе общей теории приближенных методов [2] и студентам предлагаются модельные примеры для численной реализации.

По этому же алгоритму изучаются аппроксимативные методы решения и уравнений (2) – (3). В заключении перед студентами ставятся новые задачи в области численных методов для других классов сингулярных уравнений.

Литература

1. Габдулхаев Б.Г. Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений I рода. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1994. – 285 с.

2. Габдулхаев Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач / Б.Г. Габдулхаев. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. – 232 с.

3. Ожегова А.В. Равномерные приближения решений слабо сингулярных интегральных уравнений первого рода: дисс… канд. физ.-мат. наук. – Казань, 1996. – 96 с.

4. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 288 с.

5. Хайруллина Л.Э. Равномерная сходимость приближенных решений сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Коши: дисс… канд. физ.-мат.наук. – Казань, 2011 – 103 с.